

Dev n° 24Titre: Équivalence des normes et Thm Riesz

Thm:

Soit E e.v.n de dim finie.
Alors, toutes les normes sont équivalentes.

Thm: (Riesz)

Si $B_E(0,1)$ est compact alors E un $\mathbb{R}$ -e.v.n de dim finie.

Demo: (Thm)Si $E \neq \{0\}$ fini.Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$) de dim finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .Soit $x = \sum_i x_i e_i$, $N_0(x) = \sup_i |x_i|$ définit une norme sur E .P.q toutes les normes sont eq. à N_0 .Soit N norme sur E .• Première inégalité:Notons $a = \sum_i N(e_i)$.

On a :

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq a N_0(x). (*)$$

• Seconde inégalité:Ptn, on munit $\mathbb{K}^n$ de la norme produit : $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_i |x_i|$.L'application $\varphi: (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, N_0); (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i e_i$ est une isométrie et est continue par $(*) N_0(\varphi(x)) \leq a N_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$.Donc $S = \{x \in E \mid N_0(x) = 1\} = \varphi(\underbrace{S_\infty(0,1)}_{\text{compact car fermé borné}})$ est un compact de (E, N_0) .On a, par $x, y \in E$:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \stackrel{(*)}{\leq} a N_0(x-y).$$

Donc, $N: (E, N_0) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.Comme S est un compact de (E, N_0) , on en déduit

$$b = \inf_{x \in S} N(x) \neq 0.$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in E, x \neq 0, N(x) = N_0(x) \cdot N\left(\underbrace{\frac{x}{N_0(x)}}_{\in S}\right) \geq b N_0(x)$$

• Conclusion:Ainsi, N est équivalente à N_0 .Par transitivité de la norme, on a le résultat $\square$

$$(N_0 \sim N_1, N_0 \sim N_2 \Rightarrow N_1 \sim N_2)$$

Démo: (Riesz)

Procédons par contraposée.

S.g E de dim ∞ .

Par l'absurde, s.g $\overline{B_E(0,1)}$ est compact.

* Compacité:

Alors, $\exists r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_r \in E$ t.q. $\overline{B_E(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^r B_E(x_i, 1)$.

* Notations:

Posons, $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.

Comme E est de dim strict. plus grande que F .

$E \neq F$. Donc, on peut considérer $x \in E \setminus F$.

Comme F est de dim finie, $\exists y \in F$ t.q. $\|x - y\| = d(x, F) > 0$.

(En effet, $y \mapsto \|y\|$ est continue coercive sur F qui est de dim $< \infty$.)

Donc, les fermés bornés de F sont compacts.)

Posons $x_0 = \frac{x - y}{\|x - y\|}$

* M.q $d(x_0, F) = 1$:

On a :

$$d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - 0\| = 1 \quad \text{car } 0 \in F.$$

De plus, $\forall z \in F$:

$$\|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x - y\|} \|x - (y + \underbrace{\|y - x\| z}_{\in F})\| \geq \frac{d(x, F)}{\|x - y\|} = 1$$

Donc, $d(x_0, F) = 1$.

* Conclusion:

Or $x_0 \in \overline{B_E(0,1)}$, donc, $\exists i$ t.q. $x_0 \in B(x_i, 1)$, i.e. $1 > \|x_0 - x_i\| \geq d(x_0, F) = 1$ $\nearrow$
car $\|x_0\| = 1$ □

Annexe:

* Réciproque thm Riesz:

Démo:

• Si E est de dimension finie, alors les compacts de E sont les fermés bornés, donc $\overline{B_E(0,1)}$ est compact. En effet, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée par $M > 0$ pour $\|\cdot\|$, alors les $(e_i^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E sont bornées dans $(K, |\cdot|)$. D'après le théorème de BOLZANO - WEIERSTRASS, il existe une suite extraite $(e_i^*(x_{q_i(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. De même, on peut extraire $(e_2^*(x_{q_1 \circ q_2(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. Par extraction diagonale, il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les $(e_i^*(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. De là $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Finalement, tout fermé borné vérifie la propriété de BOLZANO - WEIERSTRASS, a fortiori est compact.

* Thm projection:

Théorème de la projection sur un convexe complet — Il existe une unique application P_C de E dans C , dite **projection sur le convexe**, qui à x associe le point $P_C(x)$ de C , tel que la distance de x à C soit égale à celle de x à $P_C(x)$. Le vecteur $P_C(x)$ est l'unique point de C vérifiant les deux propositions équivalentes :

- (1) $\forall y \in C \quad \|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|,$
- (2) $\forall y \in C \quad \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0.$

Démo:

- Existence et unicité de $P_C(x)$ vérifiant (1) :

Soient δ la distance entre x et C et pour tout entier $n > 0$, F_n l'intersection de C et de la boule fermée de centre x et de rayon $\delta + 1/n$. D'après le **théorème des fermés emboîtés**, il suffit de démontrer que le **diamètre** de F_n tend vers 0. Or si y et z sont deux points de F_n , d'après l'**identité du parallélogramme**,

$$4(\delta + 1/n)^2 \geq 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 = \|y + z - 2x\|^2 + \|y - z\|^2,$$

ce qui se réécrit :

$$\|y - z\|^2 \leq 4(\delta + 1/n)^2 - 4\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2.$$

En remarquant que le milieu de y et z est un point de C donc à une distance supérieure ou égale à δ de x , on obtient :

$$\|y - z\|^2 \leq 4(\delta + 1/n)^2 - 4\delta^2 = \frac{8\delta}{n} + \frac{4}{n^2},$$

ce qui conclut.

- (1) implique (2) :

Soient y un élément de C et θ un réel compris entre 0 et 1, alors le **barycentre** $\theta y + (1 - \theta) P_C(x)$, élément de C , est plus éloigné de x que $P_C(x)$, d'après la propriété (1), donc :

$$\|x - P_C(x)\|^2 \leq \|x - P_C(x) - \theta(y - P_C(x))\|^2$$

On en déduit la majoration :

$$2\theta \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq \theta^2 \|y - P_C(x)\|^2$$

Il suffit alors de diviser par θ puis de passer à la limite quand θ tend vers 0 (par valeurs strictement positives) pour obtenir le résultat.

- (2) implique (1) :

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_C(x)\|^2 - 2\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle + \|y - P_C(x)\|^2 \geq \|x - P_C(x)\|^2$$

Remarquons qu'ici, la convexité de C n'est pas utile.

et on a :

Propriétés de la projection — La projection P_C est

- **idempotente** : $P_C \circ P_C = P_C$;
- **1-lipschitzienne**, c'est-à-dire que les **images** de deux points sont à une distance moindre que leurs **antécédents** ;
- **monotone** au sens suivant :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \langle P_C(x_1) - P_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Démo:

- L'application P_C est **idempotente** : En effet, si x est un élément de E , $P_C(x)$ est élément du convexe C , son image est donc lui-même.
- L'application P_C est « **monotone** » : C'est une conséquence directe du fait que $\langle P_C(x_1) - x_1, P_C(x_1) - P_C(x_2) \rangle$ et $\langle P_C(x_2) - x_2, P_C(x_2) - P_C(x_1) \rangle$ sont tous deux négatifs ou nuls. En sommant ces deux inégalités on obtient que

$$\langle P_C(x_1) - P_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|^2 \geq 0.$$

- L'application P_C est **1-lipschitzienne** : se déduit aussi de la minoration ci-dessus, grâce à l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

* Thm Riesz complet :

Théorème — Soit E un **espace vectoriel normé réel**. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1. E est de **dimension finie** ;
2. toute partie bornée de E est **relativement compacte** (c'est-à-dire d'**adhérence compacte**) ;
3. la **boule unité fermée** de E est compacte ;
4. E est **localement compact**.

(E, ||·||) - Equivalence des normes et thm Riesz
 $\mathbb{K}$ -e.v.n

Thm: (Riesz)

On a, $\overline{B_E(0,1)}$ compact $\Rightarrow \dim(E) < +\infty$

Prop:

Soit E de dim finie.

Alors, toutes les normes sont équivalentes.

Démo: (Prop)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E. Soit $x = \sum c_i e_i \in E$.

$N_0(x) = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |c_i|$ norme sur E.

M.q toutes les normes sont éq. à N_0 .

* 1^{er} sens:

$$\alpha := \sum_i N(e_i)$$

On a pour $x \in E$:

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x; e_i) = \sum_{i=1}^n |c_i| N(e_i) \leq \alpha N_0(x) (*)$$

* 2nd sens:

Prenons $(\mathbb{K}^n, ||·||_\infty)$

L'application $\ell: (\mathbb{K}^n, ||·||_\infty) \rightarrow (E, N_0)$ isométrée.
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum c_i e_i$

Et $\forall x \in E$, $N_0(\ell(x)) \leq \alpha N_0(x)$

ℓ continue.

Donc,

$$S = \{x \in E \mid N_0(x) = 1\} = \ell \left(\overline{S_{\mathbb{K}^n}(0,1)} \right) \leftarrow \begin{matrix} \text{compact de} \\ (E, N_0) \end{matrix}$$

cont. $\uparrow$ compact

On a par $x, y \in E$:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \stackrel{(*)}{\leq} \alpha N_0(x-y)$$

Donc, N continue.

Comme S compact: $b = \inf_{x \in S} N(x) \neq 0$

[29]

Ainsi, $\forall x \in E \setminus \{0\}$:

$$N(x) = N_0(x) \underbrace{N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right)}_{\in S} \geq N_0(x) b$$

* Conclusion:

Par transitive: OK $\square$

Démo: (Riesz)

Par contraposée.

S.g. $\dim E = +\infty$ et par l'absurde que $\overline{B_E(0,1)}$ compact.

* Compacité:

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x_1, \dots, x_n \in E \text{ t.q. } \overline{B_E(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1).$$

* Notation:

$F := \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. $\dim F < n$.

Donc, $\exists x \in E \setminus F$ et $\exists y \in F$ t.q. $\|x-y\| = d(x, F) > 0$.

$$\text{Posons } x_0 := \frac{x-y}{\|x-y\|}$$

* M.q. $d(x_0, F) = 1$:

On a:

$$d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - 0\| = 1$$

De plus, $\forall z \in F$:

$$\|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \|x - \underbrace{(y - \|x-y\|z)}_{\in F}\| \geq \frac{d(x, F)}{\|x-y\|} = 1$$

* Conclusion:

Or $x_0 \in \overline{B_E(0,1)}$.

Donc, $\exists i$ t.q. $x_0 \in B(x_i, 1)$ i.e.

$$\|x_0 - \underbrace{x_i}_{\in F}\| < 1$$

$$d(x_0, F) = 1$$

